

WYKŁAD 20.12.2021r.

Inżynieria obliczeniowa 21/22

# FALE MECHANICZNE 1

Fala mechaniczna – zaburzenie rozchodzące się w ośrodku sprężystym

Ruch falowy związany jest z następującymi procesami:

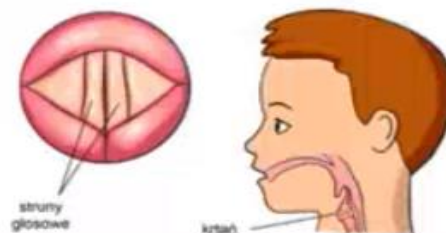
1. transportem energii przez ośrodek od cząstki do cząstki
2. z ruchem drgającym poszczególnych cząstek wokół ich położenia równowagi

*W ośrodku sprężystym drgania są przekazywane na kolejne części ośrodka powodując ich drgania!*

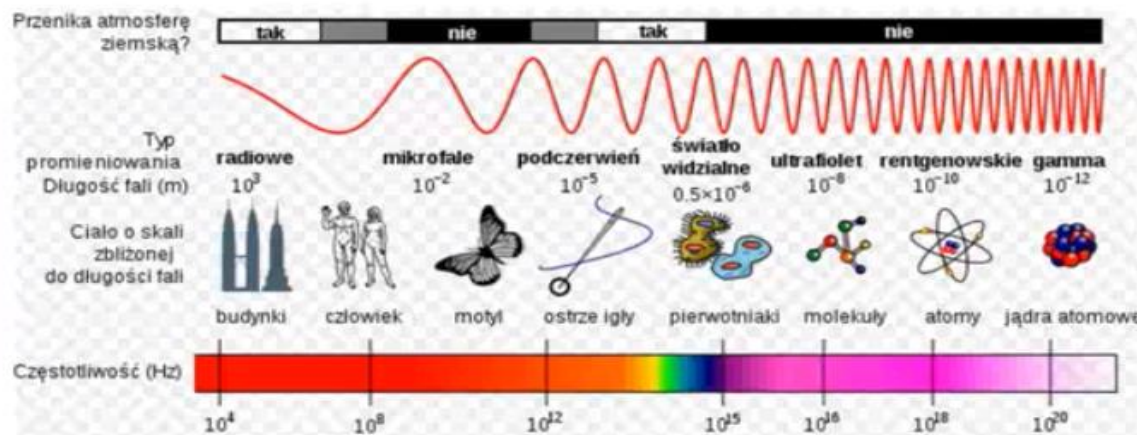
*Ośrodek nie przesuwa się, tylko jego elementy wykonują drgania!*

## RODZAJE FAL

**Fala mechaniczna** – fala rozchodząca się w ośrodkach sprężystych poprzez rozprzestrzenianie się drgań tego ośrodka (np. fale morskie, fale dźwiękowe, fale sejsmiczne). Może być podłużna lub poprzeczna.



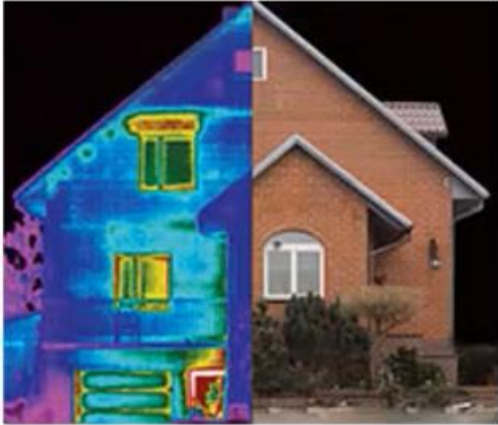
**Fala elektromagnetyczna** – rozchodzące się w przestrzeni zaburzenie pola elektromagnetycznego. Składowa elektryczna i magnetyczna fali indukują się wzajemnie. Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, może rozchodzić się w próżni.



# FALE MECHANICZNE 1

## FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

Podczerwień



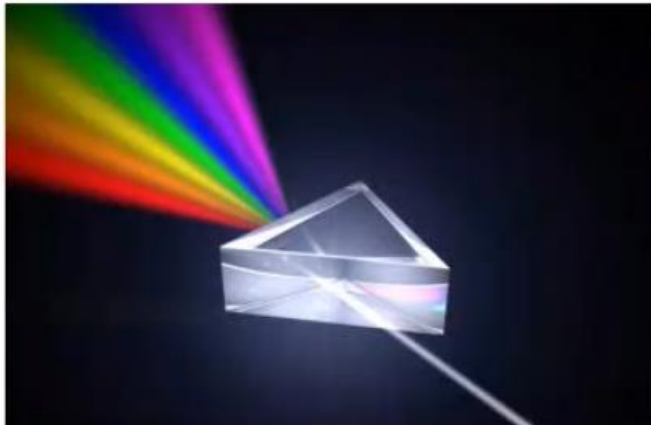
Fale radiowe



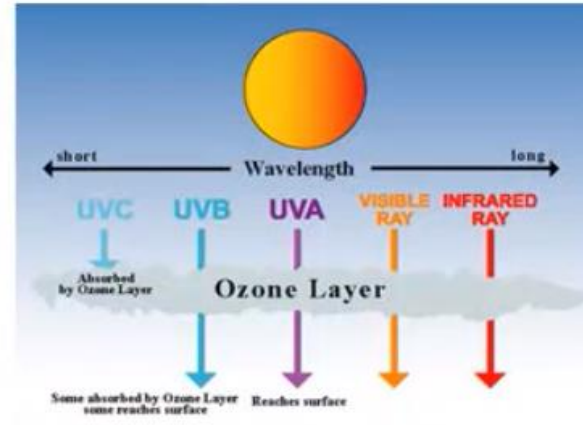
Mikrofale



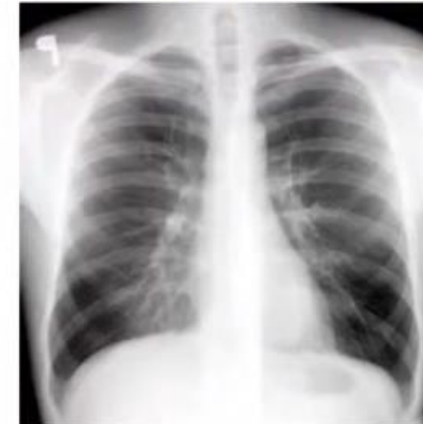
Światło widzialne



Ultrafiolet



Promieniowanie X



# FALE MECHANICZNE 1

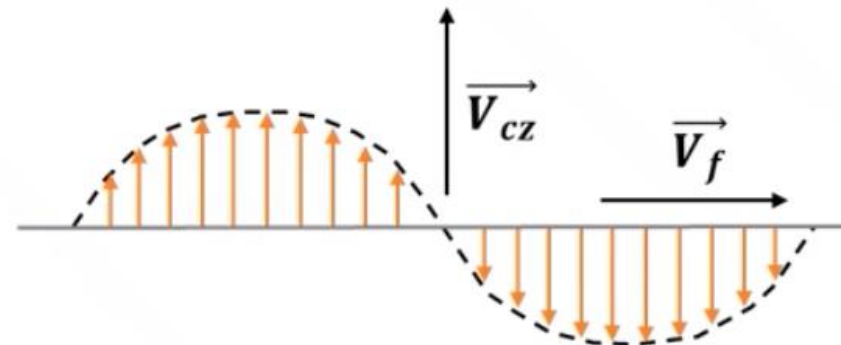
## 1. Podział fal mechanicznych ze względu na kierunek drgań cząsteczek ośrodka względem kierunku rozchodzenia się fali

**Fale podłużne** – kierunek drgań cząsteczek ośrodka jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fali (kierunku transportu energii)



np. drgania masy zamocowanej na sprężynie, fala dźwiękowa rozchodząca się w powietrzu

**Fale poprzeczne** – kierunek drgań cząsteczek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali



np. drgania naprężonego sznura, struny

## FALE MECHANICZNE 1

Impuls falowy – powstaje na skutek jednorazowego zaburzenia ośrodka

Fala harmoniczna – źródło fal wykonuje drgania harmoniczne

Czoło fali = powierzchnia falowa – powierzchnia łącząca punkty, do których w bieżącej chwili dotarła fala, przesuwanie się powierzchni falowej obrazuje rozchodzenie się fali w ośrodku

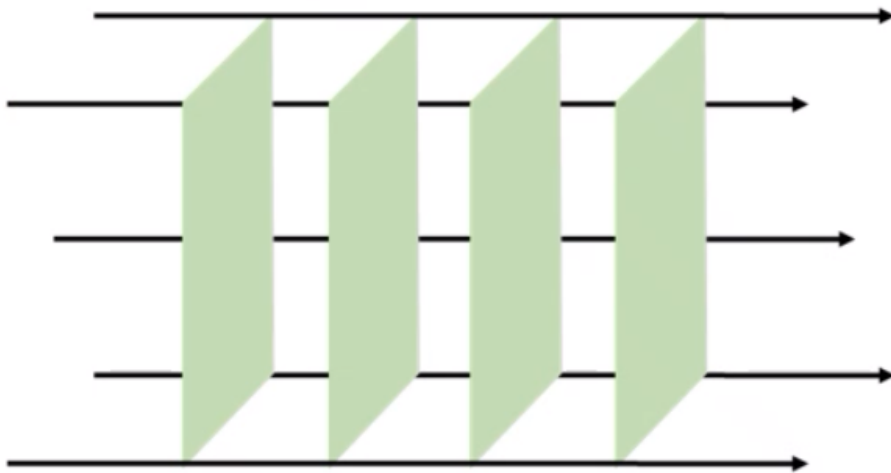
Promień fali – każda linia prosta prostopadła do czoła fali, wskazuje kierunek ruchu fali

## 2. Podział fal mechanicznych ze względu na kształt powierzchni falowej

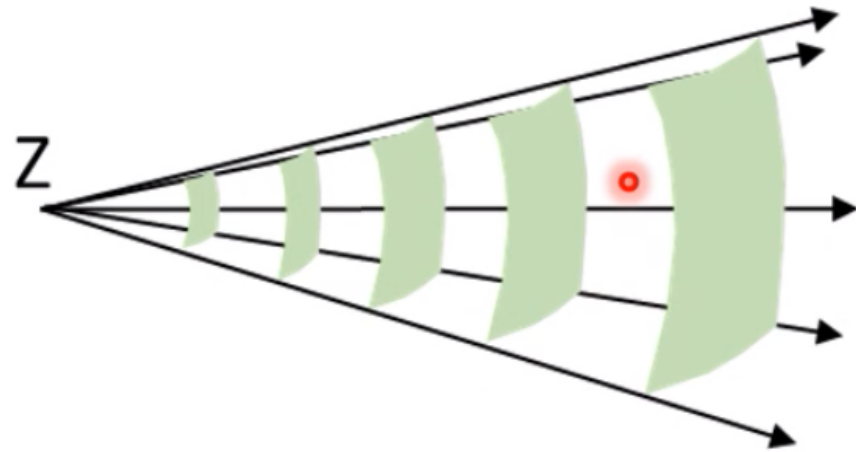
**Fala płaska** – zaburzenie rozchodzi się w jednym kierunku (promienie fali są do siebie równoległe), a powierzchnie falowe są płaszczyznami prostopadłymi do kierunku ruchu fali

**Fala kulista** – zaburzenie rozchodzi się ze źródła we wszystkich kierunkach, a powierzchnie falowe są sferami

Fala płaska



Fala kulista



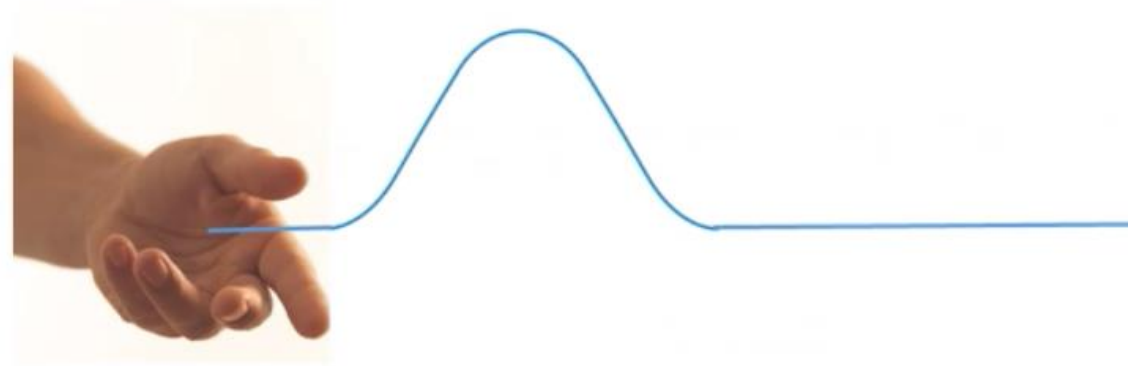
**ROZCHODZENIE SIĘ FAL W PRZESTRZENI**

Impuls falowy rozchodzący się w przestrzeni wzdłuż dodatniego kierunku osi  $x$

$$y = f(x - Vt)$$

W kierunku przeciwnym:

$$y = f(x + Vt)$$



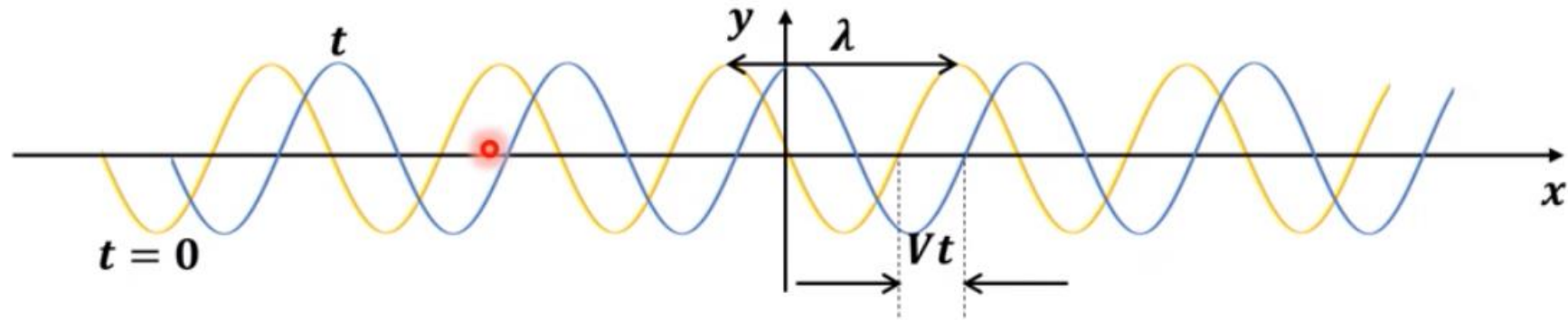
Dla określonego czasu  $t$  funkcja  $f$  opisuje kształt sznura w tej chwili!

Dla określonego  $x$  funkcja  $f$  opisuje poprzeczne drgania cząstki sznura w tym punkcie!



## FALE MECHANICZNE 1

Poprzeczna fala harmoniczna rozchodząca się wzdłuż dodatniego kierunku osi x:



$x$  – kierunek ruchu fali

$y$  – kierunek drgań cząsteczek ośrodka

$$y = A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - Vt)$$

Gdzie:

$A$  – amplituda fali,

$\frac{2\pi}{\lambda} (x - Vt)$  – faza fali,

$\lambda$  – długość fali, czyli najmniejsza odległość między punktami o tej samej fazie fali.

Okres fali – czas, w jakim fala pokonuje odległość równą długości fali

$$T = \frac{\lambda}{V}$$

$$V = \frac{\lambda}{T}$$

$$y = A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( x - \frac{\lambda}{T} t \right)$$

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

## FALE MECHANICZNE\_1

Liczba falowa:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Częstość fali:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Równanie dla poprzecznej fali harmoniczej po wstawieniu  $\omega$  i  $k$ :

$$y = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Prędkość fali:

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

**PRĘDKOŚĆ FAZOWA I GRUPOWA FALI**

Prędkość fazowa fali – prędkość z jaką porusza się określona (stała) faza fali

$$y = f(x - Vt)$$

$$x - Vt = \text{const}$$

Po zróżniczkowaniu stronami po czasie:

$$\frac{d}{dt}(x - Vt) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - V = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = V$$

## FALE MECHANICZNE 1

Prędkość grupowa fali – gdy zaburzenie falowe jest złożeniem fal sinusoidalnych o różnych częstościach, to prędkość przenoszenia energii (prędkość grupowa) może być inna niż fal składowych.



## RÓWNANIE FALOWE

Odnosi się do wszystkich rodzajów fal:

- fal akustycznych (dźwięki, ultra- i infradźwięki)
- fal mechanicznych generowanych w sprężynach, strunach
- fal powstających na wodzie
- fal elektromagnetycznych

$$y = f(x - Vt)$$

$$\frac{dy}{dt} = f'(x - Vt) \cdot (-V)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f''(x - Vt) \cdot V^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{V^2} = f''(x - Vt)$$

## FALE MECHANICZNE 1

$$\frac{dy}{dx} = f'(x - Vt)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x - Vt)$$

Równanie różniczkowe ruchu falowego:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{V^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

## TRANSPORT ENERGII PRZEZ FALE



**Fale tsunami** – fale oceaniczne, wywołane podwodnymi trzęsieniami ziemi, wybuchami wulkanów rozchodzące się pierścieniowo od miejsca wzbudzenia. Poruszają się z wielką prędkością (do 900 km/h). W strefie brzegowej ulegają spiętrzeniu i mogą osiągnąć wysokość kilkudziesięciu metrów siejąc ogromne zniszczenia.



## FALE MECHANICZNE 1

Wprawiając koniec struny, sznura w drgania wykonujemy pracę, która zamienia się na energię kinetyczną i potencjalną cząsteczek ośrodka.

$$P = 4\pi \cdot A^2 \cdot f^2 \cdot \mu \cdot V \cdot \cos^2(kx - \omega t)$$

*Moc dostarczona do ośrodka sprężystego oscyluje w czasie i jest proporcjonalna do kwadratów amplitudy i częstotliwości!*

**INTERFERENCJA FAL**

Interferencja fal – zjawisko nakładania się fal



Założenia:

1. Dwie fale rozchodzące się w kierunku osi  $x$
2. Amplitudy i częstotliwości fal są równe
3. Fazy fal różnią się o  $\varphi$

## FALE MECHANICZNE 1

$$y_1 = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

Wzór na sumę sinusów:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y = 2A \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = 2A \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = B \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

*Fala sinusoidalna o amplitudzie  $B = 2A \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$  !*

## FALE MECHANICZNE 1

*Amplituda B nowej fali, czyli wynik interferencji zależy wyłącznie od różnicy faz  $\varphi$ !*

$$B = 2A \cos \frac{\varphi}{2}$$

Dla  $\varphi = 0^\circ$  amplituda przyjmuje wartość maksymalną, fale są zgodne w fazie i wzmacniają się maksymalnie.

Dla  $\varphi = 180^\circ$  amplituda jest równa 0, fale są przeciwne w fazie i wygaszają się.

**FALE STOJĄCE**

Założenia:

1. Dwie fale rozchodzące się w dwóch przeciwnych kierunkach osi x
2. Amplitudy i częstotści fal są równe
3. Różnica faz równa 0

$$y_1 = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \cdot \sin(kx + \omega t)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

**Wzór na sumę sinusów:**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

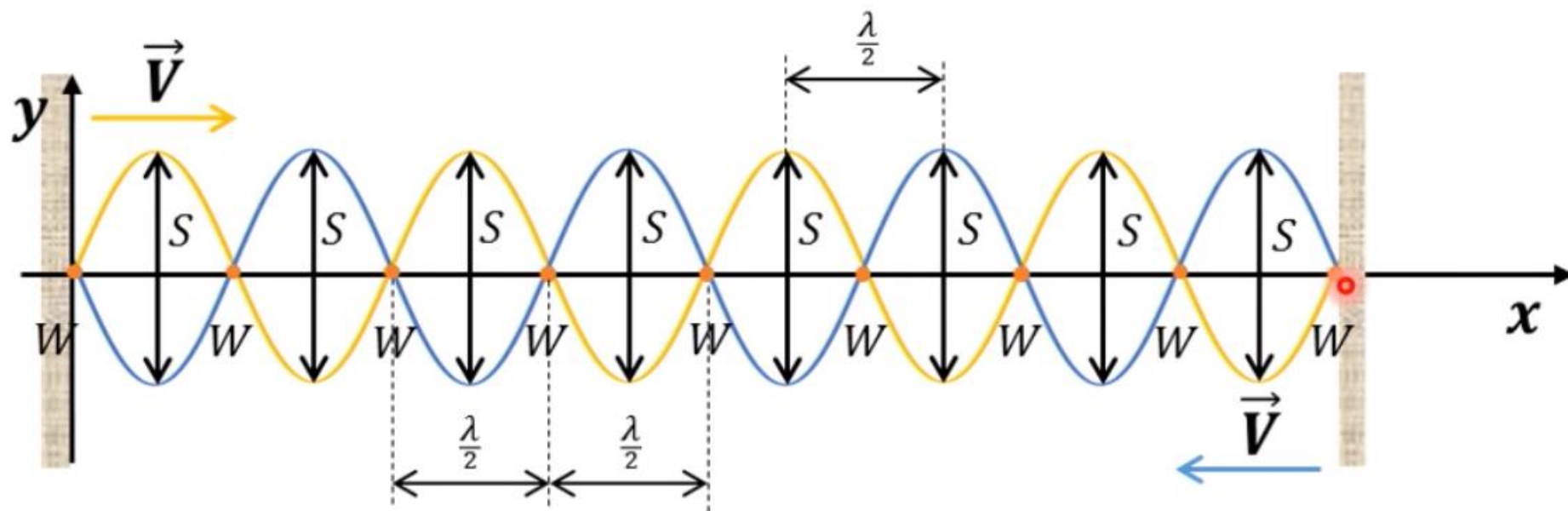
$$y = 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(-\omega t) = 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t) = C \cdot \cos(\omega t)$$

## Równanie fali stojącej:

$$y = C \cdot \cos(\omega t)$$

*Cząstki drgają ruchem harmonicznym prostym!*

*Amplituda  $C = 2A \cdot \sin(kx)$  zależy od położenia drgających punktów ośrodka!*



## Węzły i strzałki fali stojącej:

Strzałki:

$$\sin(kx) = 1$$

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \dots, (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Węzły:


$$\sin(kx) = 0$$

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots, n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

## FALE MECHANICZNE 1

### Energia fali biegnącej a energia fali stojącej:

1. Fala biegnąca przenosi energię w ośrodku.
  2. W fali stojącej energia nie jest przenoszona. Jest na stałe zmagazynowana w poszczególnych fragmentach ośrodka.
  3. Transport energii przez falę stojącą nie jest możliwy, bo energia „nie może przepłynąć przez węzły”, które nie drgają. Dla węzłów energia kinetyczna i potencjalna jest równa 0!
- 



**DUDNIENIA**

**Interferencja w przestrzeni:**

Dla fal stojących dodawanie zaburzeń daje w wyniku falę o amplitudzie stałej w czasie (zależnej od położenia cząstki drgającej)!

**Dudnienia** – przykład interferencji w czasie

Założenie:

1. Dwie fale biegną w tym samym kierunku
2. Amplitudy fal są jednakowe
3. Nieznacznie różne częstotliwości fal
4. Rozpatrujemy problem w wybranym punkcie przestrzeni

$$y_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t) = A \cdot \sin(2\pi f_1 t)$$

$$y_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t) = A \cdot \sin(2\pi f_2 t)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot (\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t))$$

## FALE MECHANICZNE 1

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cdot \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)$$

$$y = 2A \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$$

Częstotliwość drgań wypadkowych:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

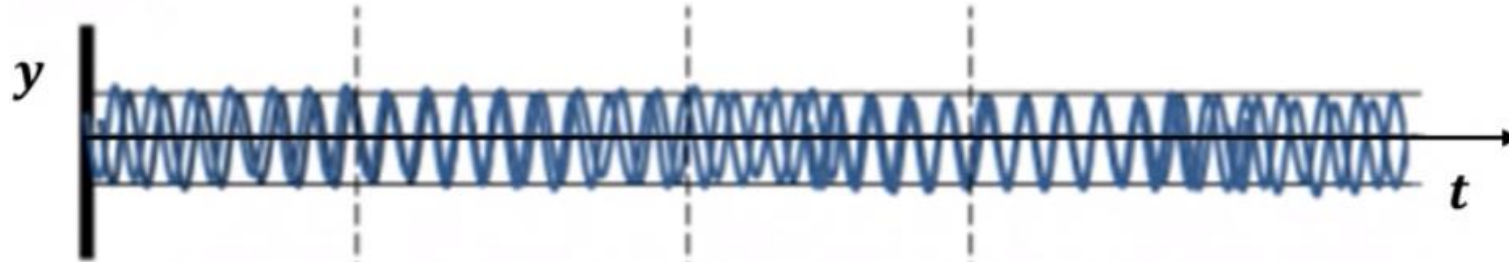
Amplituda drgań wypadkowych:

$$D = 2A \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right)$$

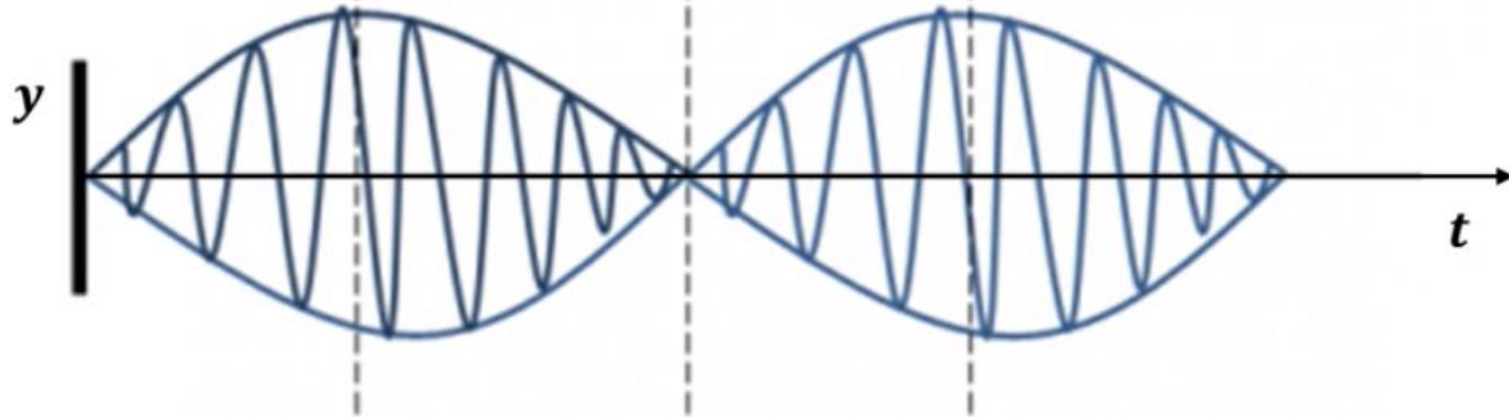
Częstotliwość zmian amplitudy:

$$f_A = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

**Drgania harmoniczne o zbliżonych częstotliwościach**



**Zmienna w czasie amplituda drgania wypadkowego**



Częstotliwość dudnień:

$$f_D = f_1 - f_2 = 2f_A$$

**EFEKT DOPPLERA**

**Efekt Dopplera** – pozorna zmiana częstotliwości rejestrowanej przez obserwatora w czasie ruchu źródła lub obserwatora. Występuje dla wszystkich fal, również elektromagnetycznych.

Założenie:

1. Ruch źródła i obserwatora odbywa się wzdłuż łączącej je prostej
2. Źródło dźwięku spoczywa
3. Obserwator porusza się w kierunku źródła z prędkością  $V_o$
4. Źródło emituje fale o długości  $\lambda$ , które rozchodzą się z prędkością  $V$

$$n = \frac{V \cdot t}{\lambda}$$

$n$  – liczba fal emitowanych przez źródło w czasie  $t$

$$n_o = \frac{V_o \cdot t}{\lambda}$$

$n_o$  – liczba fal dodatkowo rejestrowanych przez obserwatora w czasie  $t$

Częstotliwość rejestrowana przez obserwatora zbliżającego się do źródła:

$$f' = \frac{\frac{V \cdot t}{\lambda} + \frac{V_o \cdot t}{\lambda}}{t} = \frac{V + V_o}{\lambda}$$

$$\lambda = V \cdot T = \frac{V}{f}$$

$$f' = \frac{V + V_o}{\frac{V}{f}}$$

$$f' = f \cdot \frac{V + V_o}{V}$$



*Obserwator rejestruje wyższą częstotliwość niż częstotliwość źródła!*

## FALE MECHANICZNE 1

Założenie:

1. Ruch źródła i obserwatora odbywa się wzdłuż łączącej je prostej
2. Źródło dźwięku spoczywa
3. Obserwator oddala się od źródła z prędkością  $V_o$
4. Źródło emituje fale o długości  $\lambda$ , które rozchodzą się z prędkością  $V$

Częstotliwość rejestrowana przez oddalającego się obserwatora:

$$f' = f \cdot \frac{V - V_o}{V}$$

*Obserwator rejestruje niższą częstotliwość niż częstotliwość źródła!*

Założenie:

1. Ruch źródła i obserwatora odbywa się wzdłuż łączącej ich prostej
2. Źródło dźwięku oddala się z prędkością  $V_z$  od obserwatora
3. Obserwator spoczywa
4. Źródło emituje fale o długości  $\lambda$ , które rozchodzą się z prędkością  $V$

Częstotliwość rejestrowana przez obserwatora przy oddalaniu źródła:

$$f' = f \cdot \frac{V}{V + V_z}$$

*Obserwator rejestruje niższą częstotliwość niż częstotliwość źródła!*

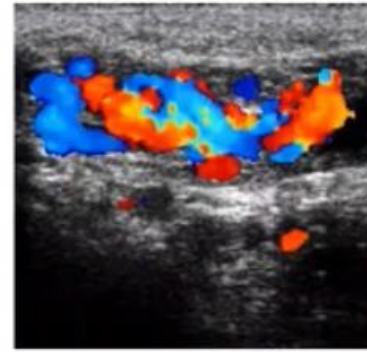
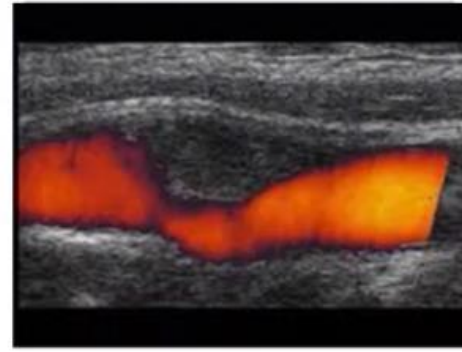
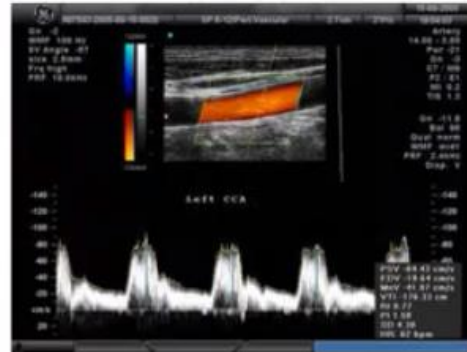
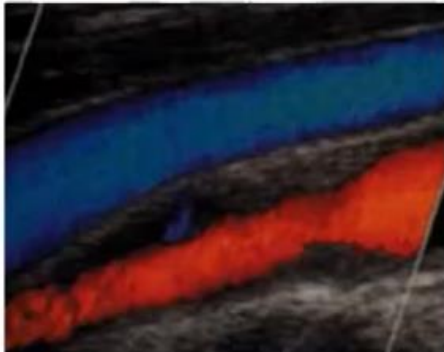
## WYKORZYSTANIE EFEKTU DOPPLERA

**Radar dopplerowski** – fala radiowa odbijają się od ruchomego obiektu. Częstotliwość fali odbitej rejestrowanej przez nieruchomego obserwatora jest zależna od prędkości ruchu.

**USG dopplerowskie** – ultradźwięki odbite od poruszającej się masy krwinkowej powracają do sondy z inną niż pierwotna częstotliwością. Różnica tych częstotliwości jest podstawą uzyskiwania obrazów dopplerowskich.

*Kolorowy obraz jest wynikiem cyfrowego przetwarzania otrzymanych sygnałów!*

*Barwa w obrazie uzależniona jest od kierunku przepływu krwi – możemy odróżnić krew żylną od tętniczej!*





Przykład 1:

Nietoperz leci w kierunku ściany z szybkością  $V_n = 30 \frac{m}{s}$  i wysyła ultradźwięki o częstotliwości  $f_{n1} = 40 \text{ kHz}$ . Jakiej częstotliwości  $f_{n2}$  ultradźwięki odbite od ściany słyszy nietoperz? Szybkość ultradźwięków w powietrzu wynosi  $V = 340 \frac{m}{s}$ .

Częstotliwość fali odbitej od ściany (zbliżające się źródło, nieruchomy obserwator):

$$f_s = f_{n1} \cdot \frac{V}{V - V_n}$$

Częstotliwość fali rejestrowane przez nietoperza (nieruchome źródło, zbliżający się obserwator):

$$f_{n2} = f_s \cdot \frac{V + V_n}{V}$$

$$f_{n2} = f_{n1} \cdot \frac{V}{V - V_n} \cdot \frac{V + V_n}{V}$$

$$f_{n2} = f_{n1} \cdot \frac{V + V_n}{V - V_n} = 40 \cdot 10^3 \cdot \frac{370}{310} = 47,7 \text{ kHz}$$